SULLE TRASFORMAZIONI
BIRAZIONALI O UNIVOCHE
E SULLE
CURVE NORMALE E SUBNORMALE DEL GENERE p

MEMORIA

dei dottori G. IUNG ed A. ARMENANTE

Digitized by Google

VA1
1500...6

Estratta dal GIORNALE DI MATEMATICHE AD USO DEGLI STUDENTI etc. Vol. VII,
Luglio ed Agosto 1869

Digitized by Google

SULLE TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI O UNIVOCHE (*EINDEUTIGEN*) E SULLE CURVE NORMALE E SUBNORMALE DEL GENERE *p*

MEMORIA

dei dottori G. IUNG ed A. ARMENANTE

(Milano).

Oggetto principale di questo lavoro si è quello di divulgare fra i nostri giovani colleghi una delle più belle teoriche della Matematica moderna, la Teoria delle trasformazioni, la quale tanta parte deve agl'illustri Professori *Riemann*, *Clebsch* e *Cremona*; e specialmente vorremmo che altri più di noi capaci s'invogliassero a studiare la classica opera dei signori *Clebsch* e *Gordan*, la quale, feconda di tante e così vaste idee, non potrebbe, in loro mano, non portare grandissimi progressi alla Scienza.

La presente Memoria è divisa in tre parti. Nella prima diamo la dimostrazione del numero p in un'ipotesi alquanto più generale di quella considerata nella *Theorie d. Abel. Funct.*, servendoci delle considerazioni geometriche usate dal Prof. *Cremona* nelle sue Lezioni sulle Funzioni Abeliano (date nel R. Istituto tecnico superiore di Milano). Nel trattare l'abbassamento dell'ordine ν della curva trasformata (§ 18) i signori *Clebsch* e *Gordan* non hanno forse tenuta la via più genorale; epperò nella seconda parte trattiamo questo argomento considerando il compenso che può aver luogo nel valore di ν quando si facciano variare e l'ordine della rete di trasformazione e il numero dei punti doppi di $f=0$ cho si assumono come punti-base di questa rete; o troviamo che quando $p>n$ esiste una curva normale di ordine $p-1$, analoga a quella di ordine $p+1$ dell'opera, che abbiamo chiamato per analogia *la curva subnormale del genere p*. Nell'ultima parte abbiamo aggiunto alcuni esempi semplicissimi di trasformazioni analitiche, fra gli altri i due citati nell'opera a pag. 66.

I.

1. Sopra due piani dati X, Y, supponiamo che si muovano con continuità due punti x, y in modo, che quando y descrive una retta, x descriva la curva corrispondente di una rete d'ordine s. projettiva a quella formata dalle rette del piano Y. Se le curve $\Phi(x)=\Phi=0$ della rete hanno m punti fissi comuni (*punti-base*), due Φ qualsivogliano si segheranno ancora in altri s^2-m punti variabili, a ciascuno dei quali corrisponde un unico e medesimo punto y, intersezione delle rette corrispondenti a quelle due curve Φ; ma viceversa ad un punto y corrispondono in generale, non uno, bensì s^2-m punti x.

Ora se il punto x descrive una data curva $f(x)=f=0$ d'ordine n, dotata di d punti doppi o di r regressi; e se fra gli m punti baso della rete d'ordine s sup-

poniamo che ve ne sieno $\sigma_1+\sigma'+\sigma''+d'+r'+d''+r''$ comuni anche ad $f=0$; e propriamente che sieno σ_1 semplici per $f=0$ e per le Φ, σ' e σ'' semplici per $f=0$, doppi e regressi per le Φ, d' e r' doppi e regressi per $f=0$ e semplici per le Φ, infine d'' e r'' doppi e regressi tanto per $f=0$ quanto per le Φ; si può domandare quale sia il luogo del punto y corrispondente a quel punto x. Siccome le intersezioni di questo luogo incognito $F(y)=F=0$ con una retta arbitraria del piano Y, hanno per corrispondenti sul piano X le intersezioni variabili di $f=0$ con una qualsivoglia curva Φ; ne segue evidentemente che $F(y)=0$ è una curva d'ordine

$$(1) \qquad \nu=ns-\sigma_1-2(\sigma'+\sigma''+d'+r')-4(d''+r'').$$

Supponiamo che la F risulti una potenza $F=(\mathfrak{F})^k=0$, dove $\mathfrak{F}$ sia irreducibile; cioè che $F=0$ sia percorsa k volte dal punto y. Quando y descrive $F=0$, uno degli s^2-m punti x corrispondenti descriverà la $f=0$, ossia il luogo di x sarà una curva composta, una parte irreducibile della quale sarà $f=0$; ed ogni punto di F corrisponderà a k punti di f. È poi evidente che se $f=0$ non è il sistema di più curve, anche F non sarà composta di curve distinte.

In particolare, se $k=1$, cioè se F non è una potenza, le curve $f=0$, $F=0$ si corrisponderanno punto per punto, cioè saranno punteggiate projettivamente: epperò, come è noto, in tal caso esse sono dello stesso genere p.

Questo teorema è abbastanza importante perchè se ne dia una dimostraziono diretta, la quale d'altronde si ricava molto facilmente con le seguenti considerazioni.

2. È chiaro che ad un punto singolare di $f=0$ non situato su tutte le Φ, corrisponderà su $F=0$ un punto dotato della stessa singolarità. Infatti se x è un punto ordinario di $f=0$, non comune alle Φ, le Φ passanti per esso formano un fascio, e segano $f=0$ in altri $\nu-1$ punti variabili: la stessa cosa deve avvenire delle rette corrispondenti nel piano Y, le quali s'intersegheranno in un punto ordinario di $F=0$. Alla Φ tangente alla $f=0$ in x, corrisponderà la retta tangente in y alla $F=0$. Ma se x è un punto doppio di $f=0$, non comune alle Φ, ogni Φ passante per esso sega $f=0$ in soli $\nu-2$ punti variabili; quindi anche nel piano Y ogni retta corrispondente a quella φ segherà $F=0$ in $\nu-2$ punti variabili, epperò il punto y corrispondente ad x sarà doppio per $F=0$. Alle Φ che in x sono rispettivamente tangenti ai due rami di $f=0$, corrisponderanno le due rette tangenti ad $F=0$ in y: e quindi se x è una cuspide per $f=0$, anche y sarà una cuspide per $F=0$. Possiamo dunque concludere che ai $d-d'-d''$ punti doppi ed agli $r-r'-r''$ regressi di $f=0$, che non sono fra i punti-base della rete delle Φ, corrispondono altrettanti punti doppi e regressi di $F=0$; e indicando rispettivamente con δ' e ρ' questi punti singolari di F, avremo

$$\delta'=d-(d'+d''), \quad \rho'=r-(r'+r'').$$

Consideriamo ora i punti-base della rete delle Φ che sono comuni anche alla $f=0$ Le Φ tangenti ad $f=0$ in uno dei punti σ_1 formano un fascio; nel piano Y si avrà

Digitized by Google

in corrispondenza un fascio di rette, il cui centro y è un punto ordinario di $F=0$, poichè le intersezioni variabili di quelle Φ essendo in numero $\nu-1$, altrettante debbono essere le intersezioni di $F=0$ con le rette uscenti da y.

Se x è uno dei d' punti doppi di $f=0$ pei quali passano tutte le Φ, le Φ tangenti in x ad uno dei rami di $f=0$, corrisponderanno a tante rette incrociate in un punto ordinario y_1 di $F=0$; ordinario perchè le intersezioni variabili di quelle Φ sono ancora $\nu-1$. Analogamente le Φ tangenti in x all'altro ramo di $f=0$ corrisponderanno a tante rette concorrenti in un altro punto ordinario y_2 di $F=0$. E quindi ad uno dei punti d' corrisponde una *coppia* di punti y_1, y_2 di $F=0$. Alla Φ che ha un punto doppio in x corrisponde la retta $y_1\,y_2$. Se x è un regresso (r') di $f=0$, i punti corrispondenti y_1, y_2 saranno infinitamente vicini.

Con ragionamenti affatto analoghi si trova che ai punti σ', σ'' di $f=0$ corrispondono altrettanti punti ordinari di $F=0$, e che ai d'', r'' punti di $f=0$, corrispondono altrettante coppie di punti (distinti o coincidenti) di $F=0$.

Dunque in conclusione ai d' e d'' punti doppi, ed agli r' e r'' regressi di $f=0$ corrispondono non punti singolari ma coppie di punti (distinti o coincidenti) sulla $F=0$. Analogamente vi saranno sulla $F=0$ dei punti doppi e regressi aventi per corrispondenti su di $f=0$ coppie di punti semplici; indicandoli rispettivamente con δ'' e ρ'', e chiamando δ e ρ tutti i punti doppi e tutti i regressi della $F=0$, sarà evidentemente

$$\delta''=\delta-\delta'=\delta-d+d'+d''\,,\quad \rho''=\rho-\rho'=\rho-r+r'+r''\,;$$

cioè sulla curva $f=0$ vi sono $\delta''+\rho''$ coppie di punti ciascuna delle quali coppie individua non una Φ, ma infinite formanti un fascio.

3. Determiniamo ora la classe di $F=0$, che è data evidentemente dal numero delle tangenti che ad essa arrivano da un punto arbitrario del piano Y, o, che vale lo stesso, dal numero delle curve Φ di un fascio arbitrario che sono tangenti alla $f=0$. I punti di contatto delle Φ d'un fascio con la $f=0$ sono le intersezioni di $f=0$ con la Jacobiana $\Sigma\pm\frac{df}{dx_1}\frac{d\Phi_1}{dx_2}\frac{d\Phi_2}{dx_3}=0$ relativa alla curva $f=0$ ed al fascio qualunque $\Phi_1+\lambda\Phi_2=0$; la quale Jacobiana è dell'ordine $(2s+n-3)$, passa pei punti σ_1, $\sigma'+\sigma''$, $d'+r'$, $d''+r''$ rispettivamente 1, 3, 2, 4 volte avendo tanto nei punti (σ) quanto nei punti $(d+r)$ le stesse tangenti che ha ivi la $f=0$ (*); e passa inoltre pei $d-d'-d''$ punti doppi e per gli $r-r'-r''$ regressi di f che non sono

(*) Si dimostra assai facilmente il seguente teorema·
« Se un punto o multiplo secondo r per tutte le curve di un fascio $\varphi_1+\lambda\varphi_2=0$ di ordi-
« ne m, è multiplo secondo i per una curva data $f=0$ d'ordine n; la Jacobiana del sistema
« $\Sigma\pm\frac{df}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{dx_3}=0$ passa $(2r+i-2)$ volte per o, ed i dei suoi rami sono toccati dalle
« i tangenti in o della curva $f=0$. »

Digitized by Google

comuni alle Φ, avendo in questi ultimi la stessa tangente. Quindi le intersezioni variabili della $f=0$ e della Jacobiana sono

$$n(2s+n-3)-2\sigma_1-4(\sigma'+\sigma'')-6(d'+r'))-10(d''+r'')-2[d-d'-d'']$$
$$-3[r-r'-r''] ;$$

In questo numero sono comprese non solo le tangenti condotto ad $F=0$ dal punto arbitrario y, ma ancora le rette che da y vanno ai ρ'' regressi di $F=0$: poichè queste rette corrispondono alle curve Φ che toccano la $f=0$ nei punti x corrispondenti ai detti regressi. (Tali punti x sono quelli ove $f=0$ è toccata non da una sola Φ, ma da infinite formanti un fascio, e questi fasci di Φ, corrispondono a fasci di rette aventi i loro centri nei regressi ρ'' di $F=0$). Ne segue quindi, sottraendo dal numero superiore la quantità $\rho''=\rho-r+(r'+r'')$, che la classe della $F=0$ è espressa da:

$$\nu(\nu-1)-2\delta-3\rho=2\nu+n(n-3)-2d-3r+r'+r''-\rho''$$

dalla quale si ha $\nu(\nu-3)-2\delta-2\rho=n(n-3)-2d-2r$ ovvero infine

$$\frac{\nu-1.\nu-2}{2}-\delta-\rho=\frac{n-1.n-2}{2}-d-r=p\,,$$

cioè « la curva trasformata $F=0$ è dello stesso genere p della curva data $f=0$.

Questa relazione è quella stessa trovata nell'opera partendo dall'ipotesi alquanto meno generale che non vi fossero dei punti σ', σ'', d'', r'', cioè nell'ipotesi che fra i punti comuni alla $f=0$ ed alle Φ non ve ne fosse alcuno doppio per le Φ. L'esistenza di quei punti non influisce per nulla sul numero p, come si è veduto; e forse per questa circostanza, certamente non isfuggita ai signori Clebsch e Gordan, essi si sono dispensati dal considerarli.

II.

4. Resta ora a vedere se l'esistenza dei punti σ', σ'', d'', r'' porti qualche modificazione nell'abbassamento dell'ordine della trasformata; cioè se il minimo valore che si ottiene per ν in quest' ipotesi, sia lo stesso di quello ottenuto nell' opera. Osservando che i punti doppi e i regressi si comportano ugualmente nel numero p, indicheremo complessivamente con σ_2 i punti σ' e σ'', con τ_2 i punti d'' e r'', e con τ_1 i punti d' ed r'; e ciò per maggior semplicità di scrittura e per seguire le notazioni dell' opera.

Supponiamo dapprima che sia $s>n-3$; in questo caso per un teorema di Jacobi (*) le intersezioni della curva data $f=0$ con una curva Φ non data completamente, sono tutte determinate da

$$ns-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=ns-p-d-r$$

(*) *Crelle* T. 15. *Th. d. Abel. Funct.* § 19 e *Cremona*, Introduz. art. IX.

Digitized by Google

soltanto fra esse; epperò le intersezioni della $f=0$ con le Φ della rete R_s, sono tutte determinate da

$$ns-p-d-r-2$$

soltanto fra esse. Ne segue che i punti $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ che noi assumiamo come punti comuni alla $f=0$ ed alle Φ della rete, sono soggetti alla condizione che il loro numero (o meglio il numero delle condizioni lineari da essi rappresentate) non superi $ns-p-d-r-2$; e siccome ciascun punto $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ conta rispettivamente per 1, 3, 1, 3 condizioni per le Φ, bisogna che sia

$$\sigma_1+3\sigma_2+\tau_1+3\tau_2 \overline{\overline{<}}\, ns-p-d-r-2\ ;$$

la quale condizione, combinata con l'equazione (1) cioè

$$\nu=ns-\sigma_1-2\sigma_2-2\tau_1-4\tau_2$$

dà l'ineguaglianza

(I) $$\nu\overline{\overline{>}}\,p+2+d+r-(\tau_1+\tau_2)+\sigma_2.$$

La (I) mostra che i punti τ_1 e τ_2 si comportano ugualmente per quanto riguarda l'ordine ν, epperò possiamo porre semplicemente $\tau_1+\tau_2=\tau$ (come nell' opera citata. p. 54). Si ha poi il minimo ordine ν dando a τ il massimo valore $d+r$, ed a σ_2 il minimo valore zero (*). E siamo così condotti alla stessa formula

$$\nu=p+2$$

data nell'opera (p. 64). Inoltre, perchè la trasformazione sia possibile, il numero

$$\sigma_1+2\tau_2=ns-\nu-2(\tau_1+\tau_2)=ns-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-2-d-r$$

delle condizioni di cui si può ancora disporre ad arbitrio, dopo aver fatto passare le Φ per tutt' i punti singolari $d+r$ della $f=0$, deve essere o positivo o nullo. Ma qui $s>n-3$; onde

$$\sigma_1+2\tau_2>\frac{n(n-3)}{2}-3-d-r=p-4$$

è in effetti positivo o nullo, quando $p>2$. Si vede quindi che con trasformazioni d'ordine superiore all' $(n-3)^0$ si ottengono curve del minimo ordine $p+2$; nelle quali trasformazioni le Φ passano per tutti i punti singolari (doppi e regressi) di $f=0$, e per altri punti fissi comuni corrispondenti alla $\sigma_1+2\tau_2$ condizioni rimaste ancora arbitrarie.

(*) Si poteva prevedere che un punto σ_2 avrebbe portato un aumento all'ordine ν. Poichè mentre esso come punto doppio assorbe 3 condizioni per le Φ, conta soltanto per 2 nelle intersezioni delle Φ con $f=0$; che se disponiamo di quelle 3 condizioni al fine di far passare le Φ per tre punti semplici di $f=0$, si hanno invece 3 intersezioni, e quindi il ν è più basso.

Digitized by Google

Supponiamo in secondo luogo che sia $s \leqq n-3$. Ponendo

$$s=n-k\,, \quad \{k=3, 4, \ldots (n-2)\}$$

si ha per l'ordine ν della trasformata

$$\nu=n(n-k)-\sigma_1-2\sigma_2-2\tau_1-4\tau_2\,;$$

ed inoltre il numero dei punti comuni, o meglio delle condizioni da essi rappresentate, non deve superare il numero di condizioni individuanti una rete di curve d'ordine $(n-k)$: cioè si deve avere

$$\sigma_1+3\sigma_2+\tau_1+3\tau_2 \leqq \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}-2$$

da cui

$$n(n-k)-\nu-(\tau_1+\tau_2) \leqq \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}-2-\sigma_2$$

ossia

$$\nu \geqq p+1+d+r-(\tau_1+\tau_2)-\frac{k(k-3)}{2}+\sigma_2.$$

5. Esaminiamo ora sotto quali condizioni si ha il minimo valore di ν. Il caso più favorevole intanto si ha ponendo $\sigma_2=0$ e prendendo

$$\nu=p+1+d+r-(\tau_1+\tau_2)-\frac{k(k-3)}{2}$$

ed allora

$$\sigma_1+2\tau_2=n(n-k)-\nu-2(\tau_1+\tau_2)=p-3+[d+r-(\tau_1+\tau_2)]-\frac{(k-3)(2n-k)}{2}.$$

I punti τ_1 e τ_2 figurano allo stesso modo nell'espressione di ν, onde possiamo per semplicità porre $\tau_1+\tau_2=\tau$; quanto al numero $\sigma_1+2\tau_2$ esso altro non esprime che il numero delle condizioni fissate ad arbitrio nello stabilire la rete delle curve Φ, e può indicarsi semplicemente colla lettera $\sigma=\sigma_1+2\tau_2$. Le due precedenti relazioni diventano, per questa notazione,

$$\nu=p+1+d+r-\tau-\frac{k(k-3)}{2}$$

e

$$\sigma=p-3+d+r-\tau-\frac{(k-3)(2n-k)}{2}.$$

Il minimo dell'espressione ν dipende evidentemente dalle quantità τ e k; e quando l'ordine $n-k$ della rete è tale che tutte le Φ possano passare per tutt'i punti singolari di $f=0$, cioè quando

(1) $\qquad d+r \leqq \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}-2 \quad$ ovvero $\quad p \geqq \frac{(k-3)(2n-k)}{2}+3$

VAL. 150. 2 - 6